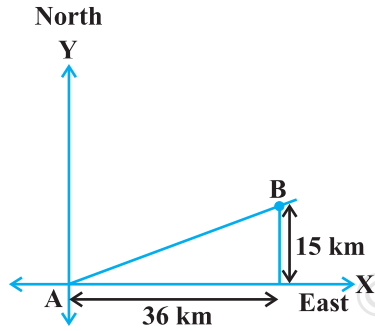
7 مختص جیومیٹری (COORDINATE GEOMETRY)

7.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ ایک مستوی میں کسی نقطے کو تلاش کرنے کے لئے ہمیں مختص محوروں کی ضرورت ہوتی ہے کسی نقطہ کا y– محور سے فاصلہ x– **مختص یا طولی مختص** کہلاتا ہے اور کسی نقطہ کا x– محور سے فاصلہ y– **مختص یا عرضی مختص** کہلاتا ہے x– محور پر موجود کسی نقطہ کے **مختصات** $(x, 0)$ کی شکل کے ہوتے ہیں اور y– محور پر کسی نقطے کے **مختصات** $(0, y)$ شکل کے ہوتے ہیں۔

یہاں آپ کے لئے ایک کھیل ہے ایک گراف پیپر پر عمودی محوروں کا ایک جوڑا بنایئے۔ اب مندجہ ذیل نقطے اس پر پلاٹ کیجئے اور ان کو بتائے گئے طریقے کے مطابق ملایئے یعنی نقطے $A(4,8)$ کو $B(3,9)$ سے B کو $C(3,8)$ سے، C کو $D(1,6)$ سے، E کو $F(3,3)$ سے، F کو $G(6,3)$ سے G کو $H(8,5)$ سے، H کو $I(8,6)$ سے I کو $J(6,8)$ سے، J کو $K(6,9)$ سے، K کو $L(5,8)$ سے اور L کو A سے ملایئے۔ اس کے بعد نقطوں $P(3.5, 7), Q(3, 6)$ اور $R(4, 6)$ کو جوڑ کر ایک مثلث بنایئے۔ اور نقطے $X(5.5, 7), Y(5, 6)$ اور $Z(6, 6)$ کو ملا کر مثلث بنایئے۔ اب $S(4, 5), T(4.5, 4)$ اور $U(5, 5)$ کو ملث بنایئے۔ اور آخر میں نقطہ S کو نقطوں $(0, 5)$ اور $(0, 6)$ سے ملایئے اور نقطہ U کو نقطوں $(9, 5)$ اور $(9, 6)$ سے ملایئے۔ آپ کو کسی طرح کی تصویر حاصل ہونی چاہیئے۔

آپ یہ بھی دیکھ چکے ہیں کہ دو متغیروں والی $ax + by + c = 0$ (b,a اور c ایک ساتھ صفر نہیں ہو سکے) شکل کی خطی مساوات کو جب گراف کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے تو ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے۔ مزید باب 2 میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ کا گراف ایک مکافی ہے۔ درحقیقت مختص جیومیٹری کی ایک الجبری اوزار کے طور پر دریافت جیومیٹری کی اشکال کا مطالعہ کرنے کے لئے ہوئی ہے۔ یہ ہماری مدد الجبرے کے استعمال سے جیومیٹری کا مطالعہ کرنے میں

کرتی ہے اور الجبرے کو جیومیٹری کے استعمال سے سمجھنے میں مدد کرتی ہے یہی وجہ ہے کہ مختص جیومیٹری کا استعمال مختلف میدانوں جیسے فزکس، انجینئرنگ، جہاز رانی زلزلے پیما سے متعلق اور آرٹ میں ہوتا ہے۔

اس باب میں آپ سیکھیں گے کہ آپ ان دو نقاط، جن کے مختصات دئے ہوئے ہوں، کے درمیان فاصلے کس طرح معلوم کریں گے۔ اور اس کے ساتھ دئے ہوئے تین نقطوں سے بنے مثلث کا رقبہ کس طرح معلوم کریں گے۔ آپ یہ بھی مطالعہ کریں گے کہ اس نقطے کے مختصات کیسے معلوم کئے جائیں جو دو نقطوں کو ملانے والے قطع خط کو دی ہوئی نسبت میں منقسم کرتا ہے۔

7.2 فاصلہ فارمولہ

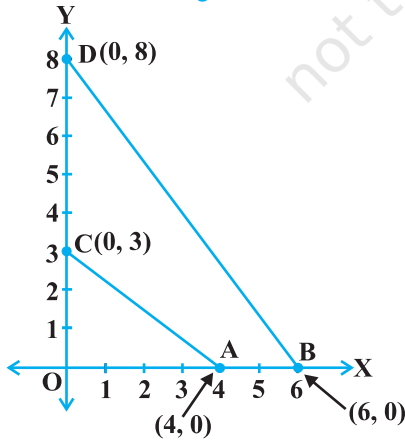
آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں

ایک شہر B، شہر A سے 36 کلومیٹر مشرق کی طرف واقع ہے۔ آپ بغیر ناپے دونوں شہروں کے درمیان فاصلہ کس طرح معلوم کریں گے۔ آیئے دیکھتے ہیں، اس صورت حال کو گراف کے طور پر شکل 7.1 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ یہ فاصلہ معلوم کرنے کے لئے فیثاغورث کے مسئلے کا استعمال کر سکتے ہیں۔

شکل 7.1

اب مان لیجئے دو نقطے x-محور پر واقع ہیں ہم ان کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر دو نقطے A(4,0) اور B(6,0) پر غور کیجئے (شکل 7.2) نقطہ A اور B، x-محور پر واقع ہیں۔ شکل میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ OA = 4 اور OB = 6 اکائیاں ہیں۔

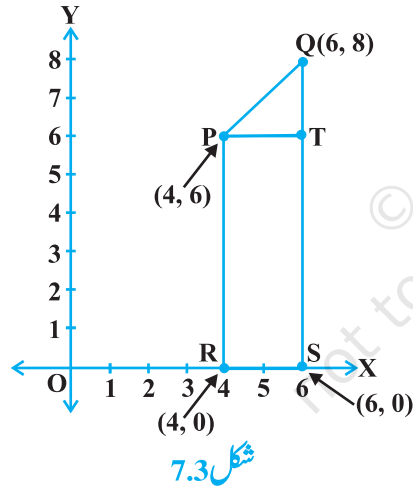
اس لئے B کا A سے فاصلہ ہے یعنی 2 اکائیاں $AB = OB - OA = 6 - 4 = 2$

اس لئے اگر گراف دو نقطے x - محور پر واقع ہوں تو ہم آسانی سے ان کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ اور C(0,3) اور D(0,8) y-محور پر ہوں۔ اسی طرح ہم اکائیاں 5 $CD = (8-3) = 5$ (شکل 7.2 دیکھیے)

شکل 7.2

کیا آپ A اور C کے درمیان (شکل 7.2) کا فاصلہ بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ کیونکہ OA = 14 اکائیاں اور OC = 3 اکائیاں اس لئے A کا C سے فاصلہ یعنی $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$ اکائیاں اسی طرح سے آپ B کا D سے فاصلے معلوم کر سکتے ہیں DB=10 اکائیاں۔

آیئے اب ایسے دو نقطوں پر غور کرتے ہیں جو مختص محوروں پر واقع نہیں ہیں۔ کیا ان کے درمیان فاصلہ معلوم کیا جا سکتا ہے؟ ہاں! ایسا کرنے کے لئے ہم فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرتے ہیں۔ آیئے ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

شکل 7.3 میں نقاط P(4,6) اور Q(6,8) پہلے ربع میں ہیں۔ ان کے درمیان فاصلے معلوم کرنے کے لئے ہم فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کریں گے؟ آیئے P اور Q سے بالترتیب x- محور پر عمود PR اور QS ڈالیں۔ P سے QS پر بھی عمود ڈالیں جو QS سے T پر ملے۔ تب R اور S کے مختصات ہیں بالترتیب (4,0) اور (6,0) اس لئے RS = 2 اکائیاں، ساتھ ہی OS=8 اور PR = 6 = TS اکائیاں ہیں۔ اس لئے QT = 2 اکائیاں اور PT = RS = 2 اکائیاں۔

شکل 7.3

اب فیثا غورث کے مسئلے کو استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس ہے۔

$$PQ^2=PT^2+QT^2$$

$$=2^2+2^2=8$$

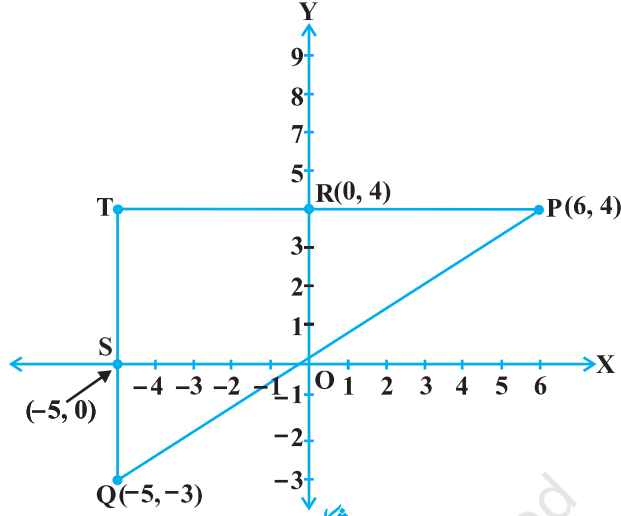
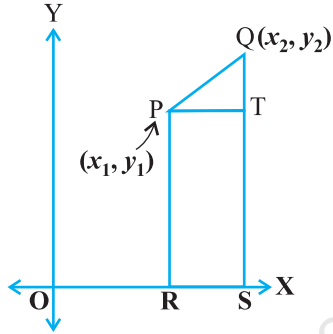
$PQ=2\sqrt{2}$ اکائیاں

آپ دو مختلف ربعات میں موجود نقطوں کے درمیان فاصلہ کس طرح معلوم کریں گے؟

نقاط P(6,4) اور Q(–5,–3) (شکل 7.4) غور کیجئے۔ QS کے x- محور پر عمود ڈالئے۔ اور نقطہ P سے QS (بڑھانے پر) پر PT عمود ڈالئے جو y- محور کو نقطہ R پر ملے۔

تب PT = 11 اکائیاں اور QT = 7 اکائیاں (کیوں؟)

قائم مثلث PTQ میں فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے اکائیاں $PQ=\sqrt{11^2+7^2}=\sqrt{170}$

آیئے اب کوئی سے دو نقطوں $P(x_1,y_1)$ اور $Q(x_2,y_2)$ کے درمیان فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ PR اور QS x- محور پر عمود ڈالیں نقطہ P سے ایک عمود کھینچا گیا جو ایک نقطہ T پر ملتا ہے (شکل 7.5 دیکھیے)۔

شکل 7.4

تب $OS = x_2$ ، $OR = x_1$ اس لئے $RS = x_2 - x_1 = PT$

مزید $ST = PR = y_1$ ، $SQ = y_2$ اس لئے $QT = y_2 - y_1$

اب مثلث PTQ میں فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

اس لئے
$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

شکل 7.5

نوٹ کیجئے کیونکہ فاصلہ ہمیشہ غیر منفی ہے اس لئے ہم ہمیشہ مثبت جذر المربع لیتے ہیں۔ اس لئے نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ ہے۔

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

جو فاصلہ فارمولہ کہلاتا ہے۔

ریمارک:

1۔ مخصوص طور پر نقطہ $P(x,y)$ کا مبدا سے فاصلہ $O(0,0)$ ہوگا۔

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2۔ ہم یہ بھی لکھ سکتے ہیں $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (کیوں؟)

مثال 1: کیا نقاط (3,2) , (–2,–3) اور (2,3) ایک مثلث بناتے ہیں؟ اگر ہاں تو مثلث کی قسم معلوم کیجیے۔

حل: آیئے PQ , QR اور PR فاصلے معلوم کرنے کے لئے فاصلہ فارمولہ کا استعمال کرتے ہیں جہاں Q(–2, –3), P(3,2) اور R(2,3) دئے ہوئے نقاط ہیں۔ ہمارے پاس ہے۔

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \quad \text{(تقریباً)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \quad \text{(تقریباً)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \quad \text{(تقریباً)}$$

کیونکہ ان میں کن ہی دو فاصلوں کا حاصل جمع تیسرے سے بڑا ہے اس لئے نقاط Q,P اور R ایک مثلث بنائیں گے۔

مزید $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ فیثا غورث کے مسئلے کے معکوس کے مطابق ہمیں $\angle P = 90^\circ$

اس لئے PQR ایک قائم مثلث ہے

مثال 2: دکھایئے کہ نقاط (1,7), (4,2)، (–1,–1) اور (–4,4) ایک مربع کے راس ہیں۔

حل: مان لیجئے A(1, 7), B(4, 2), C (–1, –1) اور D (– 4 ,4) دئے ہوئے نقطے ہیں۔ ABCD کو مربع دکھانے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ چار اضلاع کو اور دونوں وتروں کو برابر دکھا دیں۔ اس لئے،

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

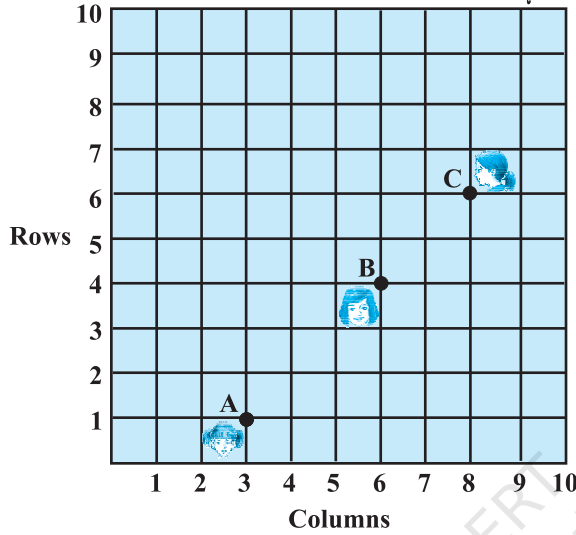
$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

کیونکہ AB = BC = CD = DA اور AC = BD، چار ضلعی ABCD کے تمام اضلاع برابر ہیں اور اس کے وتر AC اور BD بھی برابر ہیں اس لئے ABCD ایک مربع ہے۔

شکل 7.6

متبادل حل: ہم چار اضلاع اور ایک وتر معلوم کرتے ہیں جیسا کہ اوپر دکھایا گیا ہے۔ یہاں $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ اس لئے فیثا غورث کے مسئلہ کے معکوس کے مطابق $D = 90°$ کا ہوگا۔ اس لئے ایسا چار ضلعی جس کے چار اضلاع مساوی ہوں اور ایک زاویہ 90° کا ہو وہ مربع ہوتا ہے۔

مثال 3: شکل 7.6 ایک کلاس روم میں ترتیب دیئے گئے ڈیسکوں کو دکھایا گیا ہے اشیما، بھارتی اور کا میلا بالترتیب A(3, 1)، B(6, 4) اور C(8,6) جگہ پر بیٹھی ہیں کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ یہ ایک ہی خط میں بیٹھی ہوئی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بھی بتایئے۔

حل: فاصلہ فارمولہ استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے۔

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

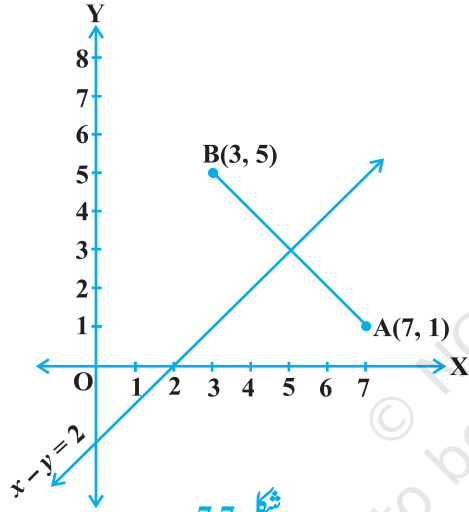
$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

کیونکہ $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC,$ تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقاط B,A اور C ہم خط ہیں۔ اس لئے وہ ایک ہی لائن میں بیٹھی ہوئی ہیں۔

مثال 4: x اور y میں ایک تعلق معلوم کیجئے جب کہ نقطہ (x, y) نقاط (7,1) اور (3,5) سے برابر فاصلہ پر واقع ہے۔

حل: مان لیجئے $P(x, y)$ نقاط A(7,1) اور B(3,5) سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

ہمیں دیا ہوا ہے کہ $AP = BP$ اس لئے $AP^2 = BP^2$

یعنی $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

یعنی $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

یعنی $x - y = 2$

جو کہ مطلوبہ تعلق ہے۔

شکل 7.7

ریمارک: نوٹ کیجئے کہ مساوات $x - y = 2$ کا گراف ایک خط ہے آپ ایسے سابقہ مطالعہ سے یہ جانتے ہیں کہ ایک نقطہ جو A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے AB کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے اس لئے $x-y=2$ کا گراف کا عمودی ناصف ہے۔

مثال 5: y–محور پر ایک نقطہ معلوم کیجئے جو نقاط A (6, 5) اور B(– 4,3) سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ y–محور پر کوئی نقطہ (0,y) کی شکل میں ہوتا ہے۔اس لئے مان لیجیے نقطہ AP(0,y) اور B سے مساوی فاصلہ پر ہے۔تب

$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

یعنی $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

یعنی $4y = 36$

یعنی $y = 9$

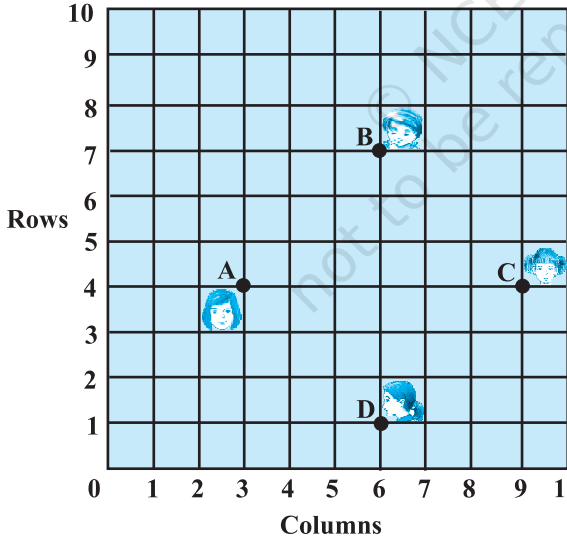
اس لئے مطلوبہ نقطہ ہے (0,9)۔

آیئے اپنے جواب کی جانچ کریں:

$$AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

نوٹ: مندرجہ بالا ریمارک کو استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ (0,9) y – محور اور AB کے عمودی ناصف کا تقاطع ہے۔

مشق 7.1

1۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے

(i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) (a, b), (– a, – b)

2۔ نقاط (0,0) اور (36,15) کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے کیا اب آپ سیکشن 7.2 میں لئے گئے دو شہروں A اور B کے درمیان فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔

3۔ معلوم کیجئے کہ نقاط (1,5)، (2,3) اور (–2,–11) ہم خط ہیں۔

4۔ جانچ کیجئے کہ آیا (5,–2)، (6,4) اور (7,–2) ایک مساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

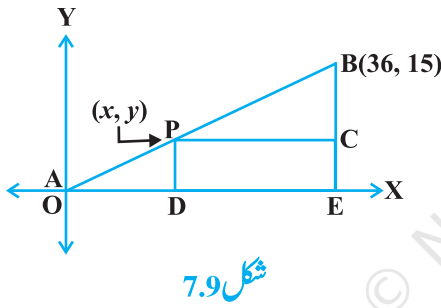
5۔ ایک کلاس روم میں 4 دوست نقاط A , B ، C اور D پر بیٹھے ہیں جیسا کہ شکل 7.8 میں دکھایا گیا ہے۔ چمپا اور چمیلی کلاس کے اندر آئی ہیں اور کچھ منٹوں تک مشاہدہ کرنے کے بعد چمپا چمیلی سے پوچھتی ہے تمھیں نہیں لگتا کہ ABCD ایک مربع ہے؟ چمیلی اس بات کو نہیں مانتی۔ فاصلہ فارمولہ سے معلوم کیجئے کہ ان میں سے کون صحیح ہے۔

شکل 7.8

6۔ مندرجہ ذیل نقاط سے بنے چار ضلعی کس قسم کے ہیں۔ اپنے جواب کی وجوہات بھی دیجیے۔

(i) (– 1, – 2), (1, 0), (– 1, 2), (– 3, 0)

(ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7۔ x– محور پر وہ نقطہ معلوم کیجیے جو (2, –5) اور (–2,9) سے مساوی فاصلہ پر ہو۔

8۔ y کی وہ قدر معلوم کیجیے جس کے لئے نقاط P(2, –3) اور Q(10,y) کے درمیان فاصلہ 10 اکائیاں ہیں۔

9۔ اگر Q(0.1)، P(5,–3) اور P(x,6) سے مساوی فاصلہ پر ہو تو x کی قدر معلوم کیجیے اور QR اور PR کے فاصلہ بھی معلوم کیجیے۔

10۔ x اور y کے درمیان رشتہ معلوم کیجیے جب کہ نقطہ (x,y) نقاط (3,6) اور (–3,4) سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

7.3 سیکشن فارمولہ

Y
B(36, 15)
(x, y)
P
C
A
O
D
E
X

شکل 7.9

آیئے سیکشن 7.2 میں دی گئی صورت حال کو دہراتے ہیں۔ٹیلیفون کی ایک کمپنی A اور B کے درمیان ایک نشریات ٹاور P پر اس طرح قائم کرنا چاہتی ہے کہ ٹاور P کا B سے فاصلہ ٹاور P کا A سے فاصلہ کا دگنا ہو۔اگر P, AB پر واقع ہے تو یہ AB کو 1:2 کی نسبت میں بانٹے گا۔(شکل 7.9 دیکھیے) اگر ہم A کو مبدا O کے طور پر لے لیں، 1 کلومیٹر کو دونوں محوروں پر ایک اکائی کے طور پر لیں، تو B کے مختصات ہوں گے (36,15): ٹاور کا مقام معلوم کرنے کے لئے ہمیں نقطہ P کے مختصات معلوم کرنا ضروری ہے۔ہم یہ مختصات کیسے معلوم کریں گے۔

مان لیجیے P کے مختصات (x,y) ہیں۔P اور B سے x– محور پر عمود کھینچیں جو بالترتیب D اور E نقطہ پر ملتے ہوں، BE, PC پر عمود ڈالیں تب مشابہت کی AA شرط کے مطابق جو آپ نے باب 6 میں پڑھی ہے، Δ POD اور Δ BPC مشابہ ہوں گے۔

اس لئے $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

اس لئے $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$۔

ان مساواتوں سے $x = 12$ اور $y = 5$ حاصل ہوتا ہے۔آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ P(12,5) شرط OP : PB =1:2 کو مطمئن کرتا ہے۔

شکل 7.10

اس مثال سے جو آپ نے سمجھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم ایک عمومی فاصلہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

کوئی دو نقطے $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ پر غور کیجیے اور فرض کیجیے کہ $P(x,y)$، AB کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں بانٹتا ہے یعنی $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (شکل 7.10 دیکھیے)

PS, AR اور BT، x– محور پر عمود ڈالئے، AQ اور PC، x– محور کے متوازی کھینچئے۔ تب مشابہت کی AA شرط کے مطابق

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

$$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$$

$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ان قدروں کو (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

اسی طرح سے $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

اس لئے نقطہ P(x,y) کے مختصات جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں بانٹا ہیں

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

یہ سیکشن فارمولہ کہلاتا ہے۔

اس کو ہم A , P اور B سے y- محور پر عمود ڈال کر بھی پہلے ہی کی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر وہ نسبت جس میں P, AB کو بانٹتا ہے، $k : 1$ لیے تب نقطہ P کے مختصات ہوں گے۔

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

مخصوص حالت: ایک قطع خط کا وسطی نقطہ، قطع خط کو $1 : 1$ کی نسبت میں بانٹتا ہے، اس لئے نقاط $A(x_1, y_2)$ اور

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

آ یئے اس فارمولہ پر منحصر چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 6: اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط $(4, -3)$ اور $(8, 5)$ کو ملانے والے قطع خط کو داخلی طور پر $3 : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

حل: مان لیجئے $P(x,y)$ مطلوبہ نقطہ ہے، سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7، \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$

اس لئے $(7,3)$ مطلوبہ نقطہ ہے۔

مثال 7: نقطہ $(-4,6)$، نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟

حل: مان لیجئے $(-4,6)$ AB کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے، اس سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(-4,6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

یاد کیجئے کہ اگر $(x,y) = (a,b)$ تب $x = a$ اور $y = b$

اس لئے $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ اور $6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

اب $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ سے ملتا ہے

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

یعنی $7m_1 = 2m_2$

یعنی $m_1 : m_2 = 2 : 7$

اب تصدیق کر سکتے ہیں کہ نسبت y- مختص کو بھی مطمئن کرے گی۔

اب $\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$ دونوں طرف m_2 سے تقسیم کرنے پر $= \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

اس لئے نقطہ $(-4,6)$ نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو $2 : 7$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

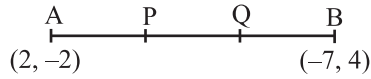
متبادل طور پر نسبت $m_1 : m_2$ کو $\frac{m_1}{m_2} : 1$, یا $k : 1$ کی طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔ مان لیجیے

$$(-4.6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right)$$

اس لئے $-4 = \frac{3k - 6}{k + 1}$

یعنی $-4k - 4 = 3k - 6$

یعنی $7k = 2$

یعنی $k : 1 = 2 : 7$

آپ y- مختص کے لئے بھی جانچ کر سکتے ہیں۔

اس لئے نقطہ $(-4,6)$ نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو $2 : 7$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے

نوٹ: آپ اس نسبت کو PA اور PB کو معلوم کر کے اور ان کی نسبت لے کر معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ جب ہی ممکن ہے جب P,A اور B ہم خط ہوں۔

مثال 8: اس قطع خط کے نقطہ تثلیث (trisection) (نقطہ جو قطع خط کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں) کے مختصات معلوم کیجئے جس کے سرے کے نقطے A(2, –2) اور B(–7,4) ہوں۔

A P Q B
(2, –2) (–7, 4)

شکل 7.11

حل: مان لیجئے P اور Q، AB کے نقطہ تثلیث ہیں یعنی AP = PQ = QB (شکل 7.11 دیکھئے)

اس لئے P، AB کو داخلی طور پر 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے P کے مختصات، سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہیں،

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$ یعنی (–1,0)

اب Q بھی AB کو داخلی طور پر 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے Q کے مختصات ہیں۔

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$ یعنی (– 4,2)

اس لئے نقاط A اور B کو ملانے والے قطع خط کے نقطہ تثلیث کے مختصات ہیں (–1,0) اور (– 4,2)

نوٹ: ہم Q کو PB کے وسطی نقطہ کے طور پر حاصل کر سکتے ہیں اور پھر ہم وسطی نقطہ کے فارمولہ کو استعمال کر کے اس کے مختصات معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 9: وہ نسبت معلوم کیجیے جس میں y– محور نقاط (5,–6) اور (–1,–4) کو ملانے والے قطع خط کو تقسیم کرتا ہے۔ نقطہ تقاطع بھی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے کی نسبت k : 1 ہے تب سیکشن فارمولہ کی رو سے اس نقطہ کے مختصات جو AB کو k : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے ہیں $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

یہ نقطہ y– محور پر واقع ہے اور ہم جانتے ہیں کہ y– محور ہر طولی مختص (abscissa) 0 ہے۔

اس لئے $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

اس لئے $k = 5$

یعنی نسبت 1 : 5 ہے۔ k = 5 قدر رکھنے پر ہمیں نقطہ تقاطع ملتا ہے $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$

مثال 10: اگر نقاط A(6,1)، B (8,2)، C(9,4) اور D(p, 3) متوازی الاضلاع کے راس ہیں، p کی قدر معلوم کیجئے۔

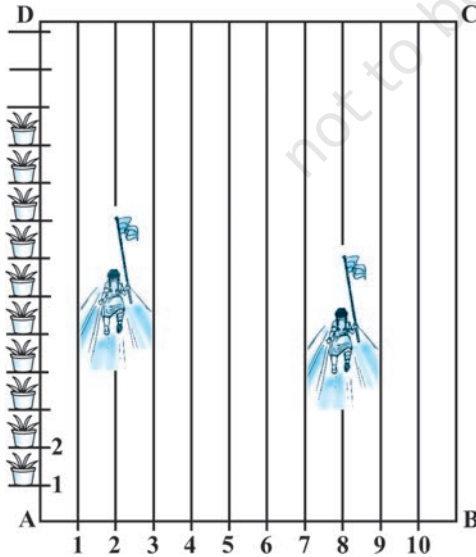
حل: ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

اس لئے AC کے وسطی نقطہ کے مختصات ہیں = BD کے وسطی نقطہ کے مختصات

یعنی $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

یعنی $\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

اس لئے $\frac{8+p}{2} = \frac{15}{2}$

$p = 7$

مشق 7.2

1۔ اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجئے جو نقاط (1,7–) اور (3–,4) کو ملانے والے قطع خط کو 3 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

2۔ ان نقاط کے مختص معلوم کیجئے جو (1– , 4) اور (3–,2–) سے ملانے والے قطعہ کو تین برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہوں۔

3۔ مستطیل کی شکل والے ایک اسکول کے میدان ABCD میں کھیل کی سرگرمیوں کو چلانے کے لئے کرنے کے لئے۔ 1 میٹر کے فاصلہ پر چاک کے پوڈر سے لائنیں بنائی گئیں۔ خط AD کے ہمراہ 1 میٹر کے

شکل 7.12

فاصلہ پر 100 گملے رکھے گئے جیسا کہ شکل 7.12 میں دکھایا گیا ہے نہاریکا دوسری لائن میں فاصلہ AD کا $\frac{1}{4}$ دوڑتی ہے اور ایک ہرا جھنڈا لگا دیتی ہے۔ پریت AD فاصلہ کا $\frac{1}{5}$ دوڑتی ہے اور آٹھویں لائن میں ایک لال جھنڈا گاڑ دیتی ہے۔ دونوں جھنڈوں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے؟ اگر رشمی کو دونوں جھنڈوں کو ملانے والے قطع خط کے بالکل بیچ میں نیلا جھنڈا گاڑنا ہو تو وہ اپنا جھنڈا کہاں گاڑے گی۔

4۔ وہ نسبت معلوم کیجیے جس میں نقاط $(-3,10)$ اور $(6,-8)$ کو ملانے والے قطع خط، $(-1,6)$ سے منقسم ہوتا ہے۔

5۔ وہ نسبت معلوم کیجیے جس میں x–محور نقاط $A(1,-5)$ اور $B(-4,5)$ کو ملانے والے قطع خط کو منقسم کرتا ہے۔ نقطہ تقسیم کے مختصات بھی معلوم کیجیے۔

6۔ اگر $(1,2)$، $(4,y)$، $(x,6)$ اور $(3,5)$ ترتیب میں لئے گئے متوازی الاضلاع کے راسوں کے مختصات ہیں تو x اور y کی قدر معلوم کیجیے۔

7۔ نقطہ A کے مختصات معلوم کیجئے جس میں x–محور نقاط $A(1,-5)$ اور $B(-4,5)$ کو ملانے والے قطع خط کو منقسم کرتا ہے نقطہ کے تقسیم کے مختصات بھی معلوم کیجیے۔

8۔ اگر A اور B بالترتیب $(-2,-2)$ اور $(2,-3)$ ہیں تو P کے مختصات معلوم کیجئے جب کہ $AP = \frac{3}{7}\ AB$ اور P قطع خط AB پر واقع ہے۔

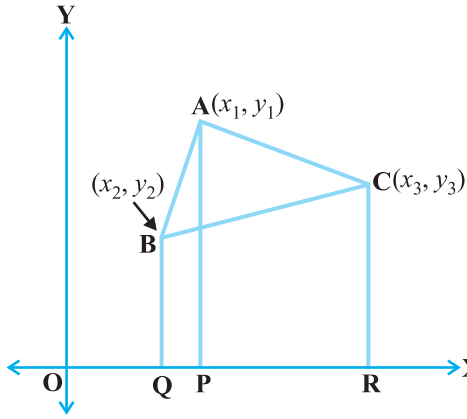
9۔ ان نقطوں کے مختصات معلوم کیجئے جو نقاط $A(-2,2)$ اور $B(2,8)$ کو ملانے والے قطع خط کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

10۔ ایک معین کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے راس اگر ترتیب میں لئے جائیں تو ہیں $(3,0)$، $(4,5)$، $(-1,4)$ اور $(-2,-1)$

[اشارہ: معین کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ اس کے وتروں کا حاصل ضرب]

7.4 مثلث کا رقبہ

سابقہ کلاسوں میں آپ نے یہ سیکھا ہے کہ کسی مثلث کا اگر قاعدہ اور اونچائی (ارتفاع) دی ہوئی ہو تو اس کا رقبہ کیسے معلوم کیا جاتا ہے۔

مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قاعدہ × اونچائی

شکل 7.13

نویں کلاس میں اپنے مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہیرون کا فارمولہ استعمال کیا تھا۔اب اگر کسی مثلث کے راس کے مختصات دیے ہوئے ہوں تو کیا آپ اس کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں؟ ہاں آپ اس کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں فاصلہ فارمولہ سے معلوم کر کے ہیرون فارمولہ استعمال کر سکتے ہیں۔لیکن یہ کافی پیچیدہ ہے کیونکہ اس کے اضلاع کی لمبائیاں اکثر غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔لیکن یہ کافی پیچیدہ ہے کیونکہ اس کے اضلاع کی لمبائیاں اکثر غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔آیئے دیکھتے ہیں کہ کوئی آسان طریقہ بھی ہے جس سے آپ مثلث کا رقبہ معلوم کر سکیں۔

مان لیجیے ABC ایک مثلث ہے جس کے راس ہیں $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$، x–محور پر A,B اور C سے بالترتیب عمود BQ,AP اور CR عمود ڈالیں صاف ظاہر ہے ABQP, APRC اور BQRC تمام منحرف ہیں (شکل 7.13 دیکھیے)

اب شکل 7.13 سے یہ صاف ظاہر ہے

ΔABC کا رقبہ = منحرف ABQP + منحرف APRC کا رقبہ – منحرف BQRC کا رقبہ

آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ

منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی اضلاع کا حاصل جمع) (ان کے درمیان فاصلہ)

اس لیے

$$\Delta\ ABC \text{ کا رقبہ } = \frac{1}{2}(BQ + AP)\ QP + \frac{1}{2}\ (AP + CR)\ PR - \frac{1}{2}\ (BQ + CR)\ QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

اس طرح سے Δ ABC کا رقبہ عبارت

$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ کی عددی قدر ہے۔

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں جن میں ہم اس کا فارمولہ استعمال کریں گے۔

مثال 11: مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے اگر اس کے راس (1, –1)، (–4,6) اور (–3,–5) ہیں۔

حل: فارمولہ کو استعمال کرکے پر راسوں A(1,–1)، B(–4,6) اور C(–3,–5) سے بنے مثلث کا رقبہ یہ ہے:

$$\frac{1}{2}[1(6 + 5) + (-4)(-5+1) + (-3)(-1-6)$$

$$\frac{1}{2}(11 + 16 + 21) = 24$$

اس لیے مثلث کا رقبہ 24 مربع اکائیاں ہے۔

مثال 12: مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے راس A (5,2), B(4, 7) اور C(7,– 4) ہیں۔

حل: راسوں A(5,2), B(4, 7) اور (7,–4) سے بنے مثلث کا رقبہ ہے۔

$$\frac{1}{2}[5(7 + 4) + (-4 - 2) + 7(2 - 7)]$$

$$= \frac{1}{2}(55 - 24 - 35) = \frac{-4}{2} = -2$$

کیونکہ رقبہ کی پیمائش منفی نہیں ہوسکتی اس لیے ہم 2 – کی عددی قیمت لیں گے یعنی 2. اس لیے مثلث کا رقبہ =2 مربع اکائیاں ہیں۔

مثال 13: مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس P(–1.5,3)، Q(6,–2) اور R(–3,4) ہیں۔

حل: دیے ہوئے نقطوں سے بنے مثلث کا رقبہ ہے۔

$$\frac{1}{2}[-1.5(-2-4) + 6(4 - 3) + (-3)(3 + 2)]$$

$$= \frac{1}{2}(9 + 6 - 15) = 0$$

کیا کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کا رقبہ 0 ہو؟ اس کا کیا مطلب ہے؟

اس کا مطلب ہے اگر مثلث کا رقبہ 0 ہو تو اس کے راس ہم خط ہوں گے۔

مثال 14: k کی قدر معلوم کیجیے جس کے لئے نقاط $A(2,3)$ ، $B(4,k)$ اور $C(6,-3)$ ہم خط ہوں

حل: کیونکہ دئے ہوئے نقطے ہم خط ہیں اس لئے ان کے ذریعے بنے مثلث کا رقبہ 0 ہوگا یعنی

$$\frac{1}{2}\quad 2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)]=0$$

$$\frac{1}{2}(-4k)=0$$

$$k=0$$

اس لئے آیئے اپنے جواب کی تصدیق کرتے ہیں

$$\Delta\ ABC \text{ کا رقبہ } =\frac{1}{2}[2(0+3)+4(-3-3)+6(3-0)]=0$$

مثال 15: اگر $A(-5,7)$، $B(-4,-5)$، $C(-1,-6)$ اور $D(4,5)$ ایک چار ضلعی کے راس ہیں تو چار ضلعی ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔

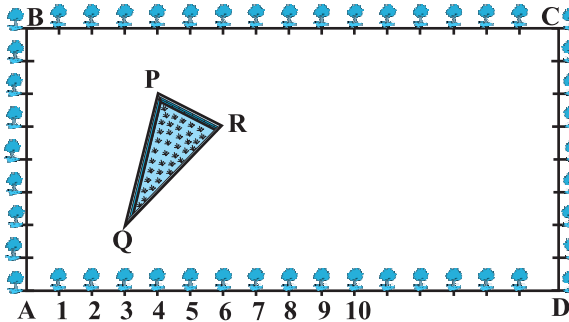
حل: B کو D سے ملانے پر آپ کو دو مثلث ملیں گے۔ ABD اور BCD

اب
$$\Delta\ ABD \text{ کا رقبہ } =\frac{1}{2}\ [-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$$

$$=\frac{1}{2}(50+8+48)=\frac{106}{2}=53 \text{ مربع رقبہ}$$

اور
$$\Delta\ BCD \text{ کا رقبہ } =\frac{1}{2}\ [-4(-6-5)-(5+5)+4(-5+6)]$$

$$=\frac{1}{2}(44-10+4)=19 \text{ مربع اکائی}$$

اس لئے چار ضلعی ABCD کا رقبہ ہے مربع اکائی $53+19=72$

نوٹ: کسی کثیر ضلعی کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہم اس کو مثلثی خطہ میں تقسیم کر دیتے ہیں جن کا مشترک رقبہ نہیں ہوتا اور ان خطوں کے رقبہ کو جمع کر دیتے ہیں۔

مشق 7.3

1۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جن کے راس ہیں۔

(i) $(2, 3), (-1, 0), (2, -4)$ (ii) $(-5, -1), (3, -5), (5, 2)$

2۔ مندرجہ ذیل ہر ایک سوال میں k کی قدر معلوم کیجئے جس کے لئے نقطے ہم خط ہیں۔

(i) $(7, -2), (5, 1), (3, k)$ (ii) $(8, 1), (k, -4), (2, -5)$

3۔ اس مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جو اس مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط سے ملکر بنا ہو جس کے راس $(0, -1)$، $(2,1)$ اور $(0,3)$ ہوں اس مثلث اور دئے ہوئے مثلث کے رقبہ کی نسبت بھی معلوم کیجیے۔

4۔ چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے راس ترتیب میں لینے پر $(-4, -2), (-3, -5), (3, -2)$ اور $(2,3)$۔

5۔ نویں کلاس میں (باب 9 کی مثال 3) آپ پڑھ چکے ہیں کہ مثلث کا وسطانیہ اس کو مساوی رقبوں والے دو مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس نتیجہ کی تصدیق ΔABC کے لئے کیجئے جس کے راس $A(4,-6)$، $B(3,2)$ اور $C(5,2)$ میں

مشق 7.4 (اختیاری)

1۔ وہ نسبت معلوم کیجیے جس میں خط $2x + y - 4 = 0$ نقاط $A(2,-2)$ اور $B(3,7)$ کو ملانے والے قطع خط کو تقسیم کرتا ہے۔

2۔ x اور y میں تعلق معلوم کیجیے اگر نقاط (x,y)، $(1,2)$ اور $(7,0)$ ہم خط ہیں۔

3۔ نقاط $(6,-6)$، $(3,-7)$ اور $(3,3)$ سے گذرنے والے دائرہ کا مرکز معلوم کیجیے۔

4۔ ایک مربع کے مخالف راس $(-1,2)$ اور $(3,2)$ ہیں اس کے باقی دو راسوں کے مختصات معلوم کیجیے۔

شکل 7.14

5۔ باغبانی کے کام کے لئے کرشنا نگر کے ایک اسکول کے 10 ویں کلاس کے طلباء کو زمین کا ایک مستطیل نما پلاٹ دیا گیا۔ اس کی باؤنڈری کے فاصلے پر گل مہر کے پودے لگائے گئے جس میں ہر پودے کے درمیان کا فاصلہ 1 میٹر ہے پلاٹ میں گھاس کا ایک

مثلث کی شکل کا ایک میدان بھی ہے جیسا کہ شکل 7.14 میں دکھایا گیا ہے ۔ پلاٹ کے باقی حصہ پر طلباء کو پھولوں والے پودوں کے بیج بونے ہیں۔

(i) A کو مبدا لے کر مثلث کے راسوں کے مختصات معلوم کیجیے۔

(ii) اگر C مبدا ہو تو ΔPQR کے راسوں کے مختصات کیا ہوں گے۔

ان حالتوں میں مثلثوں کا رقبہ بھی معلوم کیجئے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔

6۔ مثلث ΔABC کے راس ہیں A(4,6), B(1,5) اور C(7,2) ایک خط کھینچا گیا جو اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے۔ جب کہ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$. مثلث ADE کا رقبہ معلوم کیجیے اور اس کا موازنہ Δ ABC کے رقبہ سے کیا جائے (مسئلہ 6.2 اور 6.6 کو یاد کیجیے)

7۔ مان لیجیے A (4,2), B (6,5) اور C (1,4) مثلث ABC کے راس ہیں۔

(i) A سے کھینچا گیا وسطانیہ BC سے D پر ملتا ہے D کے مختصات معلوم کیجیے۔

(ii) AD پر نقطہ P کے مختصات معلوم کیجیے جب کہ AP : PD = 2 : 1

(iii) وسطانیوں BE اور CE کے بالترتیب نقطوں Q اور R کے مختصات معلوم کیجیے جب کہ AB:QE=2:1 اور CR:RF=2:1

(iv) آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

[نوٹ: وہ نقطہ جو تینوں وسطانیوں میں مشترک ہوتا ہے مرکز ثقل کہلاتا ہے اور ہر ایک وسطانیہ کو 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے]

(v) اگر $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ مثلث ABC کے راس ہیں تو مثلث کے مرکز ثقل کے مختصات معلوم کیجیے۔

8۔ ABCD ایک مستطیل ہے جو نقاط A(–1,–1), B(–1,4), C(5,4) اور D(5, –1) سے مل کر بنا ہے P, Q, R اور S بالترتیب اضلاع AB, BC, CD اور DA کے وسطی نقاط ہیں۔ کیا چارضلعی PQRS ایک مربع ہے؟ ایک مستطیل ہے؟ یا ایک معین ہے؟ اپنے جواب کے جواز پیش کیجیے۔

7.5 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1۔ $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ ہے $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2۔ نقطہ $P(x, y)$ کا مبدا سے فاصلہ ہے $\sqrt{x^2 + y^2}$.

3۔ نقطہ $P(x, y)$ کے مختصات جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے ہیں $\left(\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

4۔ نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کا وسطی نقطہ ہے $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

5۔ نقاط $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ اور (x_3, y_3) کو ملانے سے بنے مثلث کا رقبہ مندرجہ ذیل عبارت کی عددی قدر ہے۔

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

قارئین کے لئے نوٹ

سیکشن 7.3 میں آپ نے نقطہ P کے مختصات (x,y) کے سیکشن فارمولہ کے بارے میں بحث کی جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کو $m_1 : m_2$ میں تقسیم کرتا ہے۔ جو ہے،

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

نوٹ کیجئے کہ یہاں $PA : PB = m_1 : m_2$

لیکن اگر P ،A اور B کے درمیان نہ ہو کر خط AB پر واقع ہو یعنی قطع خط کے $PA : PB = m_1 : m_2$ باہر تب ہم کہتے ہیں کہ P نقاط A اور B کو ملانے والے قطع خط خارجی طور پر تقسیم کرتا ہے۔ ایسی حالت کے لئے سیکشن فارمولہ کے بارے میں آپ اگلی کلاسوں میں پڑھیں گے۔